1) Esercizio Uno: Studiare la funzione

$$f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}.$$

In particolare, si determinino: dominio, zeri, limiti, asintoti, derivata prima, punti critici.

Dominio $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \to -1} f(x) = +\infty, \lim_{x \to 1} f(x) = -\infty.$$

Derivata:

$$f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1},$$

sempre positiva nel dominio, quindi f sempre crescente.

$$f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2},$$

si annulla solo per $x = 0$, quindi concavità verso l' alto per $x < 0$, verso il basso per $x > 0$.

2) Esercizio Due: Si discutano le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + kz = 3, \\ x + ky + 3z = 2. \end{cases}$$

M matrice coefficienti.

$$DetM = 6 + k - k^2 = 0,$$

per $k = 2, -3$. Quindi il sistema ammette una sola soluzione per $k \neq 2, -3$. Sia A la matrice completa. Per $k = 2$, $rkM = rkA = 2$, quindi il sistema é indeterminato con $3 - 2 = 1$ parametro. Per $k = 2$, $rkM = 2$, $rkA = 3$, quindi il sistema é impossibile.

3) Esercizio Tre: Determinare la primitiva di

$$\int 7x \cos(3x^2 - 5) dx.$$

4) Esercizio Quattro: Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xy}{(x-1)^2}, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

A variabili separabili:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{(x-1)^2} dx,$$

con $t = x - 1$,

$$\log|y| = \int \frac{t+1}{t^2} dt = \log|t| - \frac{1}{t} + c = \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + c,$$

imponendo la condizione iniziale

$$\log 1 = -1 + c,$$

$c = 1$ e
$$y(x) = (x-1)e^{\frac{x-2}{x-1}}.$$

5) Esercizio Cinque: chiamiamo con B i Biologi, con F i Fisici, con M i Matematici e con I gli Ingegneri.
Usiamo inoltre il simbolo S per denotare gli Sperimentali ed il simbolo T per i teorici. Con questa notazione si ha:

$$P(B) = \frac{6}{10}, \quad P(M) = \frac{1}{10}, \quad P(F) = \frac{1}{10}, \quad P(I) = \frac{2}{10},$$

inoltre
$$P(S|B) = 1, \quad P(S|I) = 1, \quad P(S|F) = P(S|M) = \frac{1}{2}.$$

quindi
$$P(S) = P(S|B)P(B) + P(S|I)P(I) + P(S|M)P(M) + P(S|F)P(F) = 0.9.$$

Per rispondere alle domande successive notiamo che $P(F|S)P(S) = P(S|F)P(F)$ (e lo stesso vale sostituendo B ad F), quindi

$$P(F|S) = \frac{P(S|F)P(F)}{P(S)} = 0.055, \tag{0.1}$$

$$P(B|S) = \frac{P(S|B)P(B)}{P(S)} = 0.66. \tag{0.2}$$