M.M.M.

M.R. = 6 CFU
Prof. D. Andreucci

S.D. = 3 CFU
Prof. A. BARRA

classroom CODE $\boxed{\text{xebumum}}$

cui Prodest? ←

→ Materiale
→ ESAME

TAKE HOME MESSAGE

* DEF. ODE (INTRO)
* Separazione variabili
* Meccanica antica vs moderna
* Aristotele e Platone
* l'importanza degli archetipi ($\ddot{x} + x = 0$)

INIZIAMO!

CAPITOLO UNO

Def. 1.1: Sol. di 1 eq. Diff.

sia $\Omega \in \mathbb{R}^{n+2}$ un insieme aperto

e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ 1 f.ne continua e

tale che definisca 1 eq. differenziale

di ordine (n):

$$F(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

allora la funzione $\underline{x(t)}$ di classe $C^n(J)$,
dove $J \in \mathbb{R}$ si chiama
"Soluzione Locale" se

- $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in \Omega \quad \forall t \in J$
- $F(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in J$

<u>oss 1.2</u> $\dot{x}^2 + x^2 + 1 = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

$\dot{x}^2 + x^2 = -1$

EX. 1.3 Sol. diretta e integrazione

Si consideri $x^{(n)} = 0$, $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots c_n t^{n-1}$$

esempio concreto: moti galileiani

$$\boxed{\ddot{x} = 0} \Rightarrow \dot{x} = v_0 \longrightarrow \boxed{x(t) = v_0 t + x_0}$$

OSS. 1.4 Non è detto che se la sol ∃ ⇒ ∃!

$$* \begin{cases} \dot{x}^2 = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t + c_1 \rightarrow \dot{x}_1 = 1 \rightarrow \dot{x}_1^2 = 1 \\ x_2 = -t + c_2 \rightarrow \dot{x}_2 = -1 \rightarrow \dot{x}_2^2 = 1 \end{cases}$$

Def. 1.5 FORMA NORMALE

1 eq. diff. di ordine n si dice "in Forma Normale" se la derivata di ordine massimo è esplicitata

$$x^{(n)} = F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$$

Def 1.6 Problema di Cauchy

Dat: $(\alpha, \beta_0, \dots \beta_{n-1}) \in \Omega \rightarrow$ 1 sol. locale

del problema di Cauchy

$$x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

$$x^{(i)}(t=\alpha) = \beta_i \qquad i = 0, 1, \dots n-1$$

è 1 sol. locale dell'eq. diff.

e le condizioni $x^{(i)}(t=\alpha) = \beta_i$ si

chiamano "DATO DI CAUCHY"

Def. 1.8 SOLUZIONE MASSIMALE

es $\dot{x} = x$, $x(0) = 1$

$x_1(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $x_2(t) = e^t$, $t \in [0, 2)$

sol. massimale

1 sol. massimale del P.d.C. é 1 sol. locale su 1 intervallo J : ogni altra soluzione definita su 1 intervallo I risulti con $I \subset J$.

OSS. 1.9 INSIDIE DA EVITARE

$$\text{PdC}\begin{cases}\dot{x} = F(t,x) \\ x(\alpha) = \beta\end{cases} \longrightarrow \frac{d\cancel{x}}{d\cancel{t}} = F(t,\cancel{x})$$

$$x(t) = \beta + \int_{\alpha}^{t} F(t', x(t'))\,dt'$$

NO

EX. 1.10 METODO degli ANSATZ

$m = k = 1$

$$\underbrace{\ddot{x} + x = \phi}_{\text{oscillatore armonico}}$$

$$ma = -kx \Leftarrow a = -x \rightarrow \underline{\ddot{x} = -x}$$

$$x(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \Leftarrow \underline{\text{Sol.}}$$

$$\dot{x} = -a\sin(t) + b\cos(t)$$

$$\ddot{x} = -a\cos(t) - b\sin(t)$$

$$\ddot{x} + x = -\underline{a\cos(t)} - b\sin(t) + \underline{a\cos(t)} + b\sin(t) = \phi$$

EX. 1.11. Metodo degli ansatz parziali

ODE $\ddot{x} = -x + \cos(2t)$

ansatz: $\boxed{x(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + c\cos(2t)}$

per caso: verificare che se $c = -\frac{1}{3}$ allora
la proposta nel rettangolo è soluzione

Def. 1.12 EQ. Diff. AUTONOMA
in forma normale $x^{(n)} = F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$
$\to \nexists f(t)$ esplicita

Thm 1.12 Traslabilità Temporale

Se l'ode è autonoma, sia $X \in C^{n}(I)$

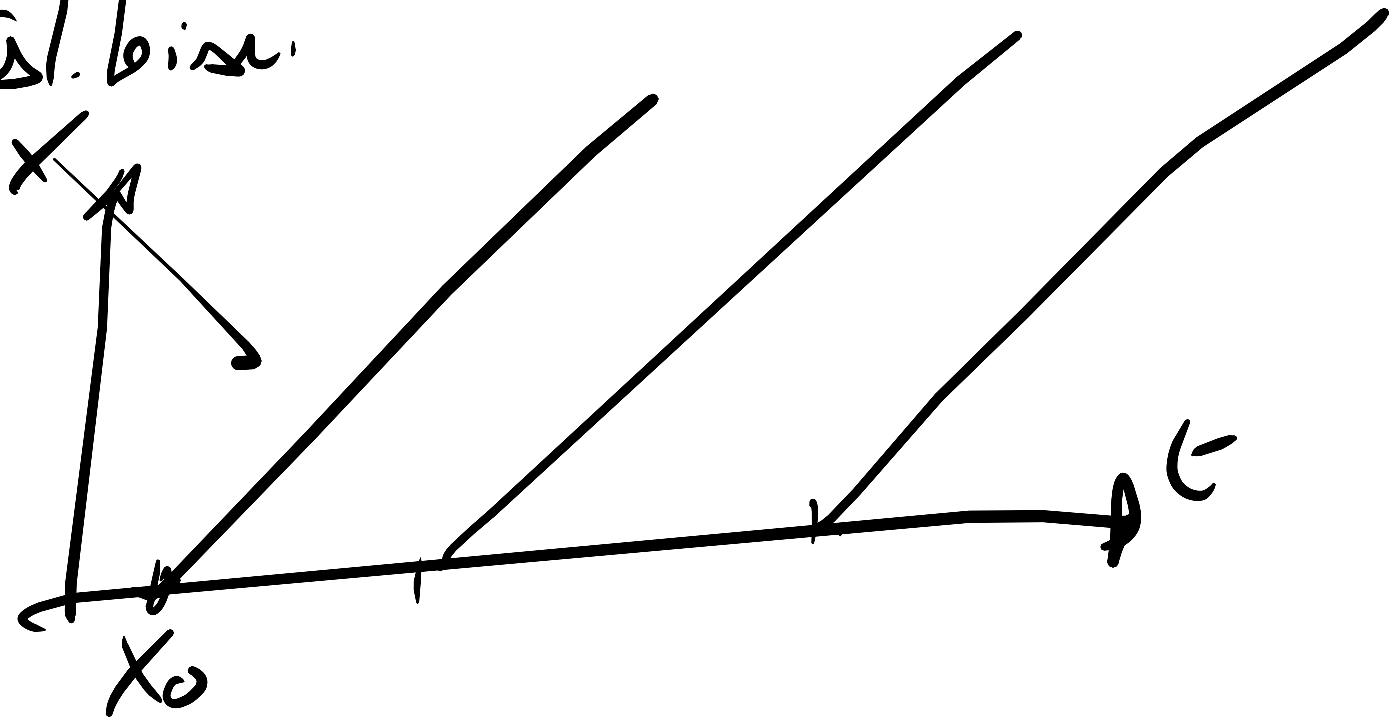
e X è la sol.

$\Rightarrow$ anche $Y(t) = X(t-T)$ è soluzione

ex Mot. Ol. bise

$$\begin{cases} \ddot{X} = \phi \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$x(t) = x_0 + t$



Tecnica della separazione delle variabili: es.

PARACADUTE DI ARISTOTELE

$$m\frac{dv}{dt} = -\beta v + mg$$

$$\boxed{-\beta v + mg = y}$$

$$dy = -\beta dv$$

$$dv = -\frac{1}{\beta}dy$$

$$\frac{dv}{[-\beta v + mg]} = \frac{1}{m}dt$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{y} = -\frac{\beta}{m}\int_0^t dt \rightarrow \ln[y(t)] - \ln[y_0] = -\frac{\beta}{m}t$$

$$\rightarrow \ln\left[\frac{y(t)}{y_0}\right] = -\frac{\beta}{m}t$$

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \phi$$

$$-\beta v_{lim} = -mg$$

$$\rightarrow \boxed{v_{lim} = \frac{mg}{\beta}}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+C^{-1}q=0$$

$\to$ [illegible] [illegible]

$\beta=0$

$R=0$

$$\boxed{t \to -t}$$

Sec. I.II : Separazione di Variabili

(1) I ordine ODE (2) : $\dot{x} = \varphi(x)\psi(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x)\psi(t) \rightarrow \frac{dx}{\varphi(x)} = \psi(t)\,dt$$

$\boxed{\text{EX}}$ DET. la sol. massimale $\rightarrow$

$$\dot{x} = x \cdot t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x \cdot t \rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_0^t t\,dt$$

$$\ln\left[\frac{x(t)}{x_0}\right] = \frac{t^2}{2} \rightarrow x(t) = x_0 \exp\left[t^2/2\right]$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

EX. 1.13b DET. la sol. massimale di

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(t=0) = x_0 > 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dx}{dt} = x^2$$

$$\frac{dx}{x^2} = dt \rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} x^{-2} dt = \int_0^t dt = t - 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t = \frac{-x_0 + x}{x x_0} = t \rightarrow -x_0 + x = t x x_0$$

$$-\frac{x_0}{x} + 1 = t x_0 \rightarrow -\frac{x_0}{x} = t x_0 - 1$$

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0}{(1 - t x_0)}} \rightarrow I = (-\infty, x_0^{-1})$$