DISUGUAGLIANZA DI GRONWALL

Sia $I=[a,b)$, $a<b$. Se vale che $\begin{cases}\beta(t)\\ U(t)\end{cases} \in C^1(I)$

$\rightarrow \dot{U}(t) \leq \beta(t)U(t)$, $t \in I$ aperto, $\dot{y}(t)=\beta(t)y$:

$U(t)$ è limitata dalla soluzione di

$$U(t) \leq U(a) \exp \int_a^t \beta(\tilde{t})\,d\tilde{t} \qquad \forall t \in I$$

Proof $\rightarrow$

$$v(t) = \exp \int_a^t \beta(\tilde{t})\,d\tilde{t} \;\longrightarrow\; \dot{v}(t) = \beta(t)\,v(t),\quad v(a) = 1$$

$$v(t) > 0 \;\; \forall t \in I$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u(t)}{v(t)}\right) = \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{v^2} = \frac{\dot{u}v - \beta u v}{v^2} \leq \phi$$

$$\frac{1}{v}\left[\dot{u} - \beta u\right] \leq \phi$$

b derivata di $\dfrac{u}{v}$ $\to$ decrescente

lim. sup. di

$v(a) = 1$

$$\Rightarrow \frac{u(t)}{v(t)} \leq \frac{u(a)}{v(a)} = u(a) \;\longrightarrow\; u(t) \leq u(a) \exp \int_a^t \beta(\tilde{t})\,d\tilde{t}$$

$\square$

LEMMA 1.17 A-C

Sia $x \in C^1(a,b)$, $x>0$, $\exists\ \sigma \geq 0$ e $C>0$ costanti date.

Se per hp vale $\dot{x} \leq Cx(t)+\sigma \qquad t \in (a,b)$

allora per $a < t_0 \leq t \leq t_1 < b$ vale che

$$[Cx(t_1)+\sigma]\, e^{c(t-t_1)} \leq Cx(t)+\sigma \leq [Cx(t_0)+\sigma]\, e^{c(t-t_0)}.$$

Se invece vale $\dot{x} \geq -Cx(t)-\sigma, \quad t \in (a,b)$

$$\Rightarrow [Cx(t_1)+\sigma]\, e^{-c(t_1-t)} \leq Cx(t)+\sigma \leq [Cx(t_0)+\sigma]\, e^{c(t-t_0)}.$$

PROOF

siccome $cx(t)+\sigma \overset{?}{=} 0 \to cx+\sigma+\varepsilon$ e poi $\varepsilon \to 0$

dall'essere $\dot{x} \le cx+\sigma+\varepsilon$ posso dire $\forall \tau \in (a,b)$:

$$\frac{d}{d\tau}\ln[cx(\tau)+\sigma+\varepsilon] = c\,\underbrace{\frac{\dot{x}}{[cx+\sigma+\varepsilon]}}_{\le 1} \le c$$

se $\tau > \tau_0$ integro su $\tau \in [\tau_0, t]$ ed ottengo:

$$\ln\left[\frac{cx(t)+\sigma+\varepsilon}{cx(t_0)+\sigma+\varepsilon}\right] \le c(t-t_0)$$

da cui:

$$cx(t)+\sigma+\varepsilon \le [cx(t_0)+\sigma+\varepsilon]\,e^{c(t-t_0)}$$

nel lim $\varepsilon \to 0^+$ ho

parte di destra del lemma

Per l'altro bound (quello di sinistra) si fa concettualmente uguale cioè

Considero $t < t_1$ ed integro $\frac{d}{d\tau} \ln \left[cx + \sigma + \varepsilon \right] = \frac{c\dot{x}}{cx + \sigma + \varepsilon}$

$\to \ln \left[\frac{cx(t_1) + \sigma + \varepsilon}{cx(t) + \sigma + \varepsilon} \right] \leq c(t_1 - t)$ da cui:

$$\left(cx(t_1) + \sigma + \varepsilon \right) \leq \left[cx(t) + \sigma + \varepsilon \right] e^{c(t_1 - t)}$$

cioè

$$\left[cx(t_1) + \sigma + \varepsilon \right] e^{-c(t_1 - t)} \leq cx(t) + \sigma + \varepsilon$$

e nel lim $\varepsilon \to 0$ ho la Tesi $\square$

COROLLARIO 1.18

sia $x \in C^1(a,b)$, $\sigma \geq 0$, $c > 0$ costanti date.

se assumo che $|\dot{x}(t)| \leq c|x(t)| + \sigma$ $t \in (a,b)$

allora $\forall (t,s) \in (a,b)$ si ha

$$c|x(t)| + \sigma \leq [c|x(s)| + \sigma]e^{c|t-s|}$$

OSS. 1.20 per l'esempio 1.14 cioè $\dot{x} = x^2$, $x(t=0) = x_0 > 0$

Non vale! infatti $x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}$

Oss. 1.21

Scenario tipico con $X \in C^1(a,b)$

$\dot X(t) \geq -cX$, $X(t_0) = X_0 > 0$

$\hookrightarrow X(t) \geq X_0 e^{-ct}$ X non si annulla mai.

Voglio sapere che X sempre positiva

Se $X_0 > 0$, $\exists$ 1 intorno $[0, \delta)$, $\delta > 0$

in cui $X(t) > 0$

Se definisco $T = \sup\{t > 0 \mid X(\tau) > 0,\ 0 < \tau < t\}$

si ha $T > 0$ e $X(t) > 0$ per $t \in (0, T)$

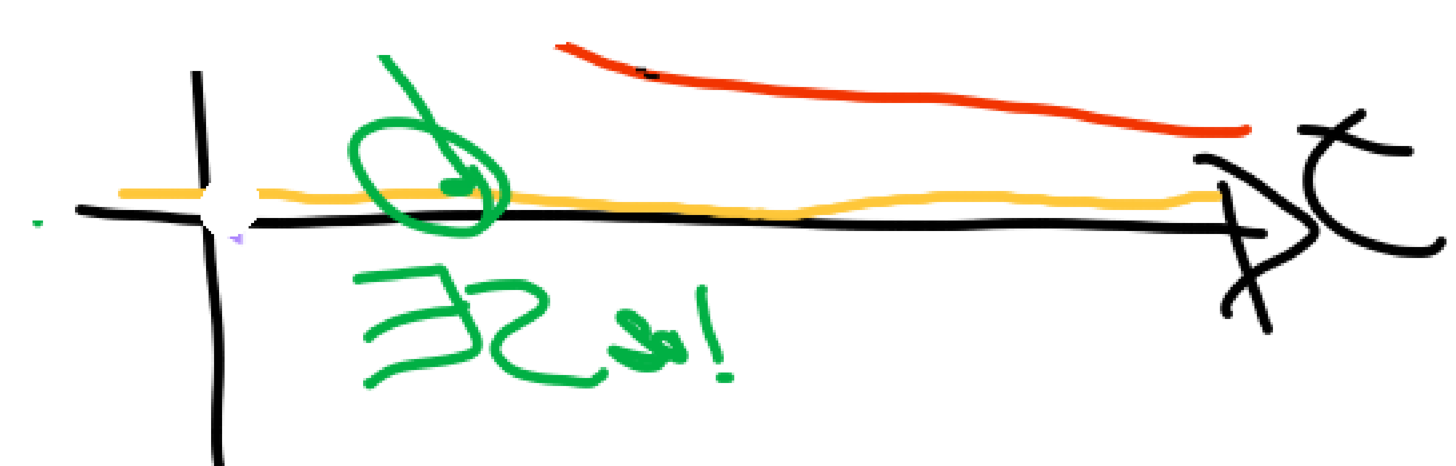
$\hookrightarrow T \to +\infty$

Ex. $Y(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

$\hookrightarrow \dot Y = -2\sqrt{Y}$

$Y(t=0) = 1 > 0$

$\hookrightarrow$ Non vale Gronwall



DIMOSTRIAMO ORA che $T \to +\infty$.

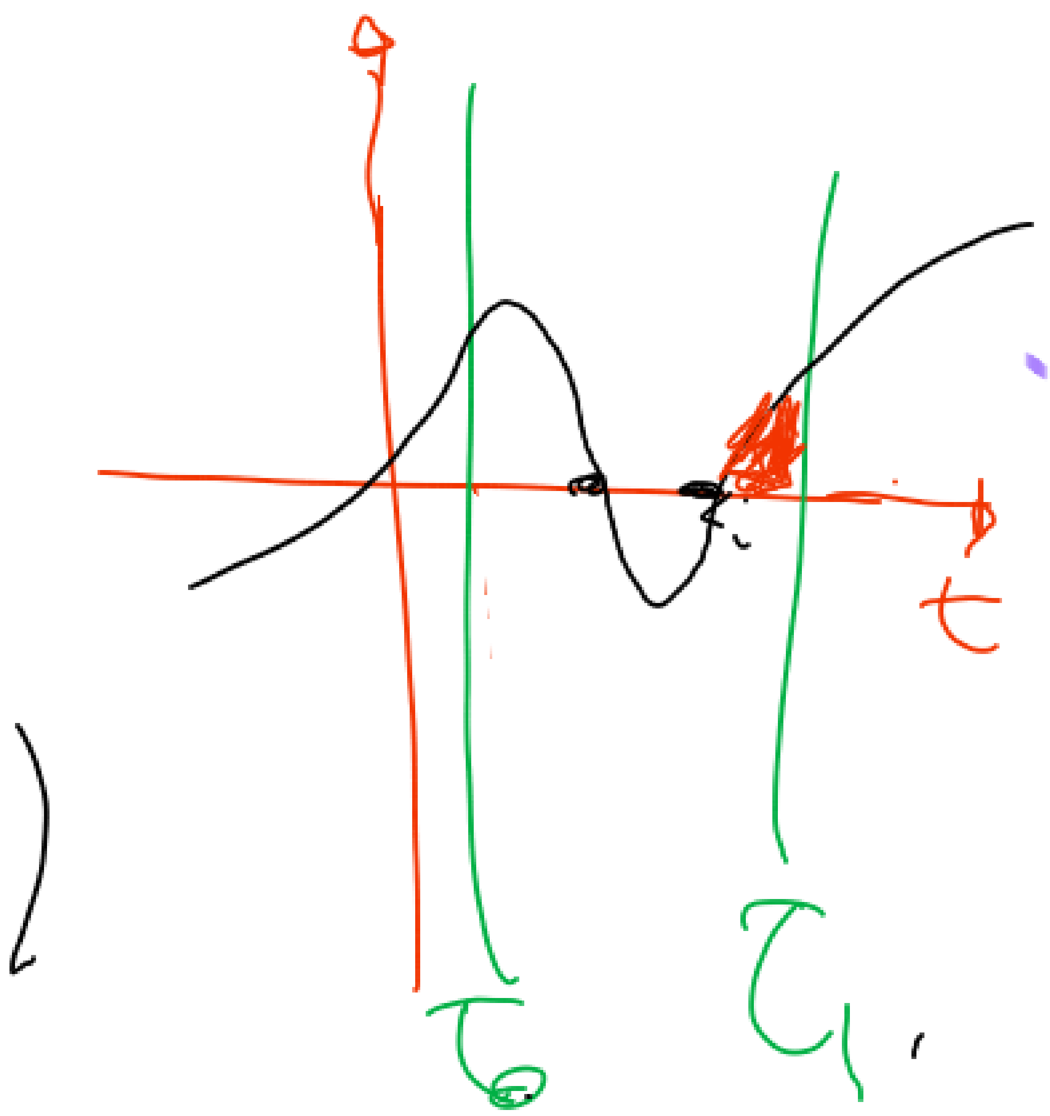
Se, per ASSURDO, $T < +\infty$ allora deve essere (Gronwall)

$$x(T) = \lim_{t \to T^-} x(t) \geq \lim_{t \to T^-} x(0) e^{-ct} = x_0 e^{-cT} > 0$$

$$T' = [T, T+\delta] \to x(t) > 0$$

Lemma 1.19 una proprietà delle funzioni continue

Sia $f \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ (limitato), supponiamo che

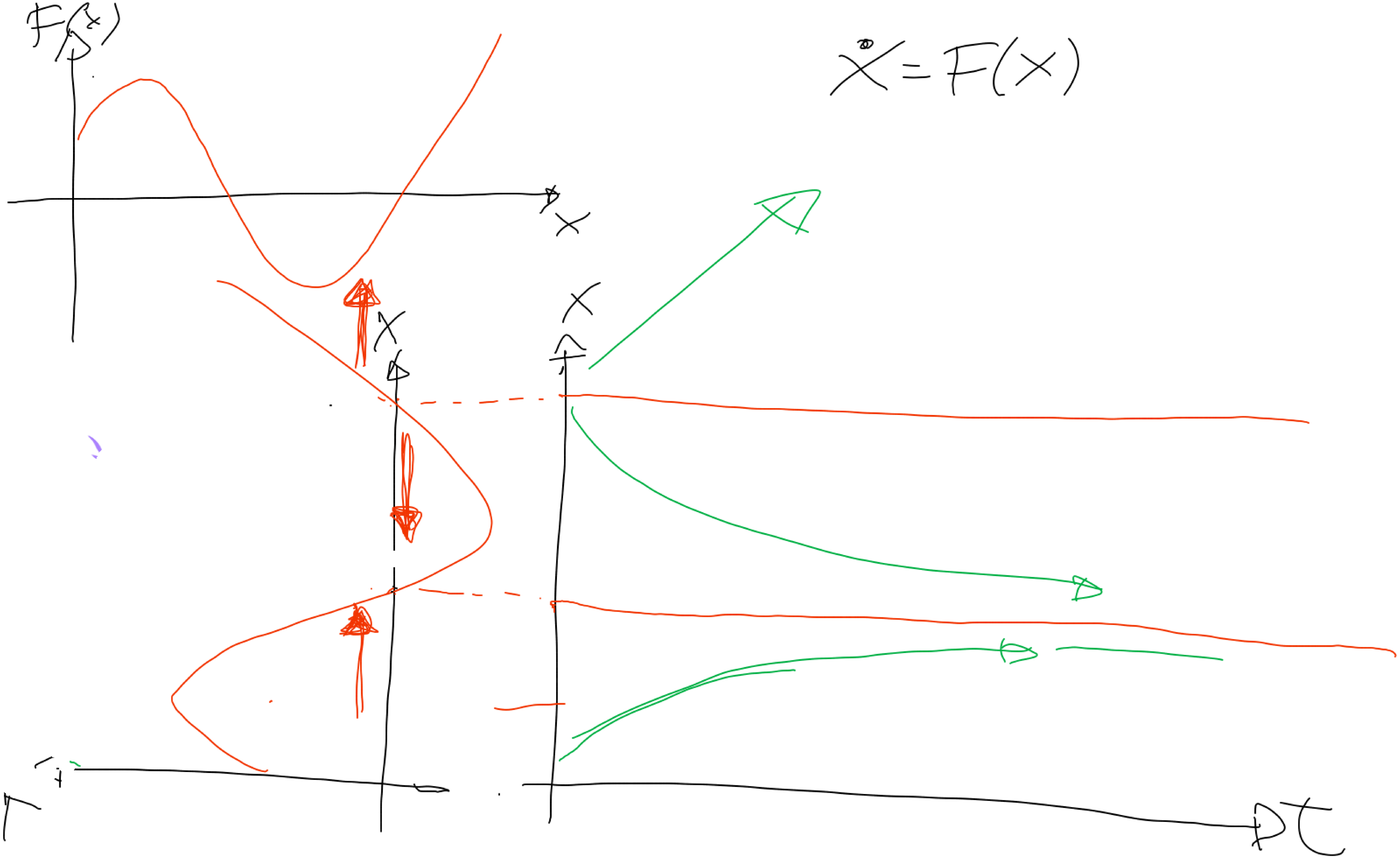


$$Z := \{ t \in I \mid f(t) = 0 \} \neq \emptyset$$

e $f(t) \neq 0$ per $t > \tau_1 - \varepsilon$ (ε, τ_1 opportuni)

Allora $\exists\, s := \sup Z$ in particolare $s \le \tau_1 - \varepsilon$ e $s = \max Z$

$$\dot{x} = F(x)$$



1.3 SYS. DYN. MONODIMENSIONALI: $\dot{x} = F(x)$

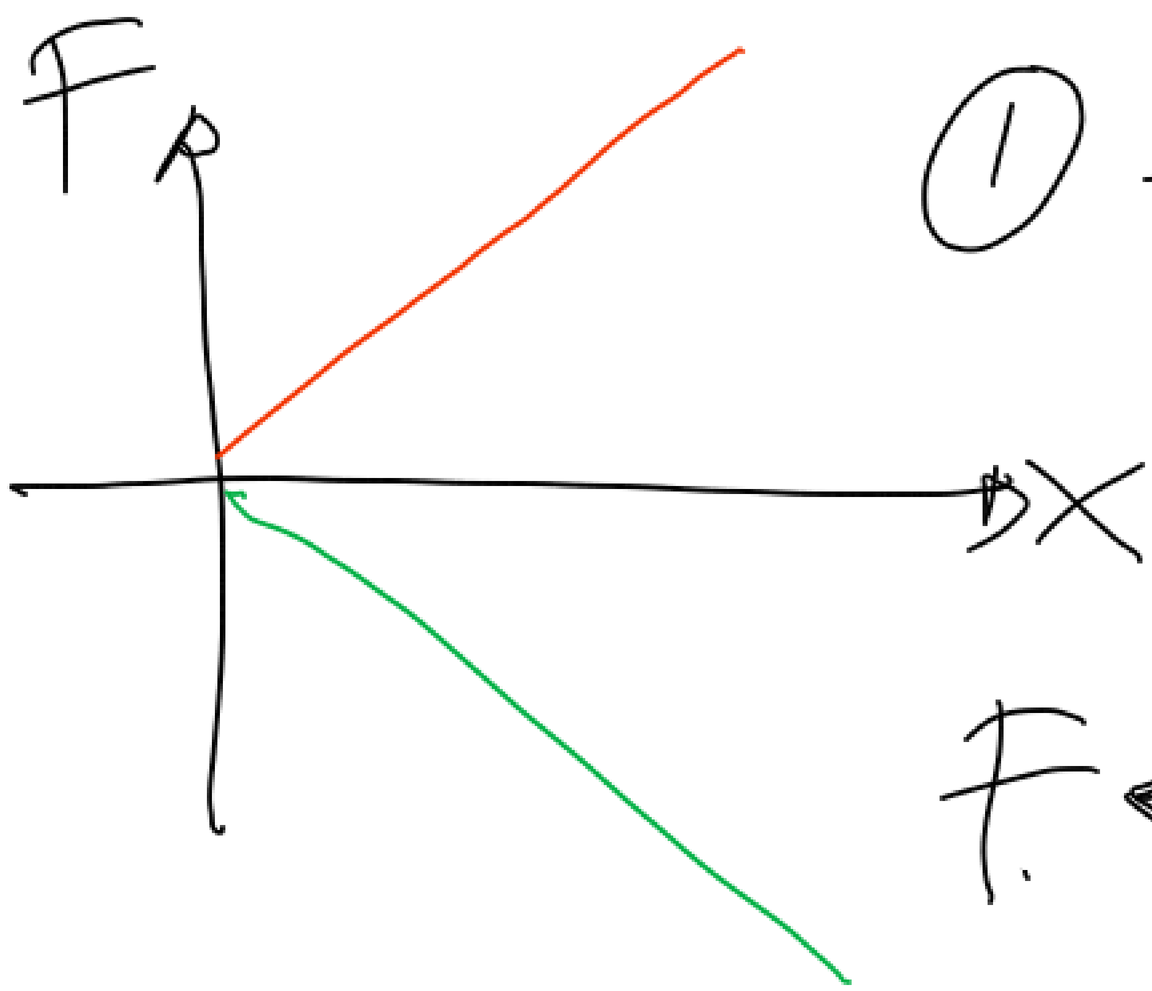
- l'EDO in forma normale autonoma di ord. 1: $\dot{x} = F(x)$ con $F: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta sys. dyn. monodimensionale
- le soluzioni dell'EDO: "CURVE INTEGRALI"
- l'evoluto di (x_0, t_0) si chiama "linea di fase" e la sua tangente $F(x)$ è il campo delle direzioni

DEF. 1.23: PUNTO DI EQUILIBRIO

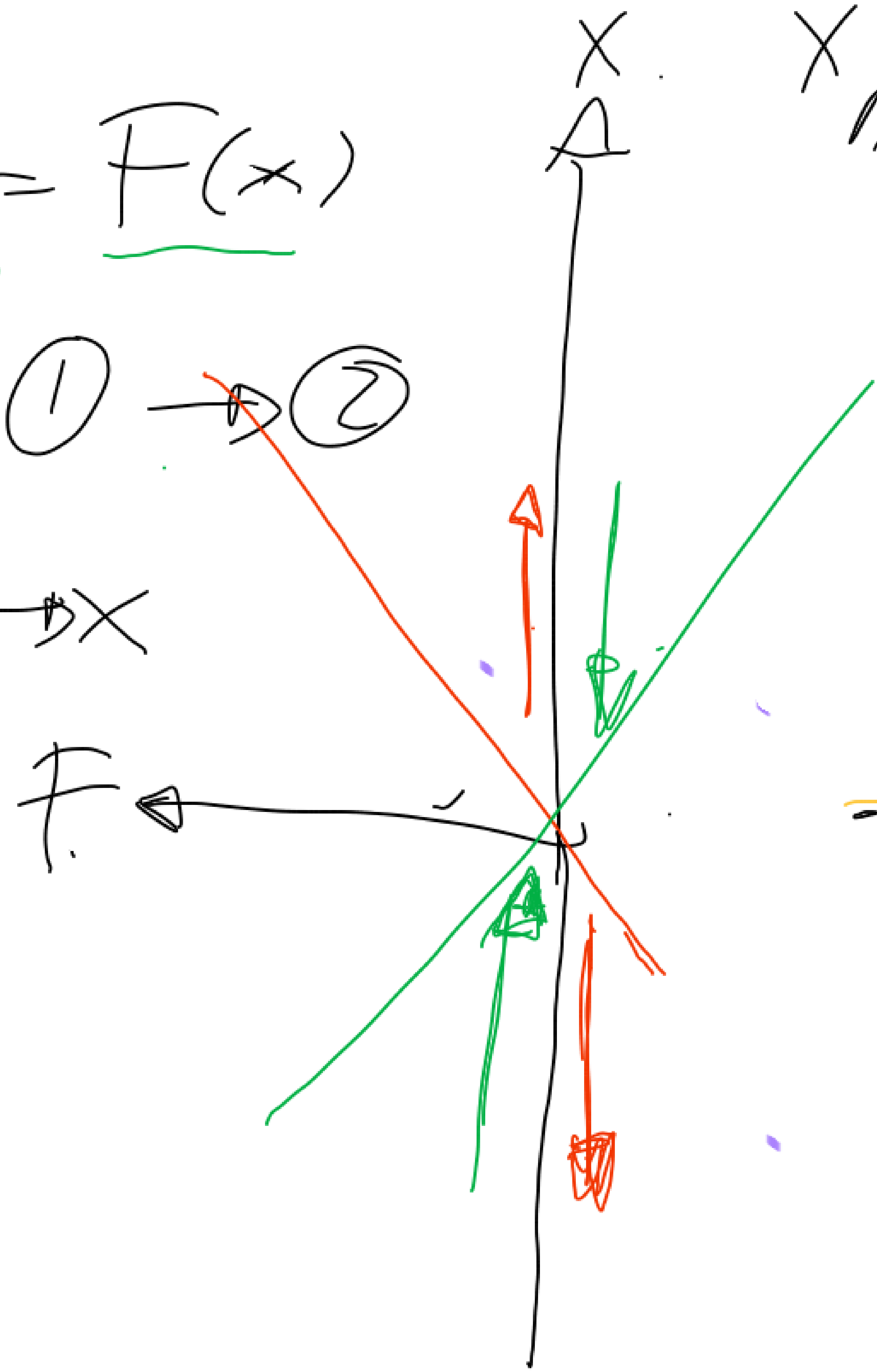
1 punto $x_0 \in I$ è "di equilibrio" (o fisso) per il sys. dyn. $\dot{x} = F(x)$, se e solo se $f(x_0) = 0$.

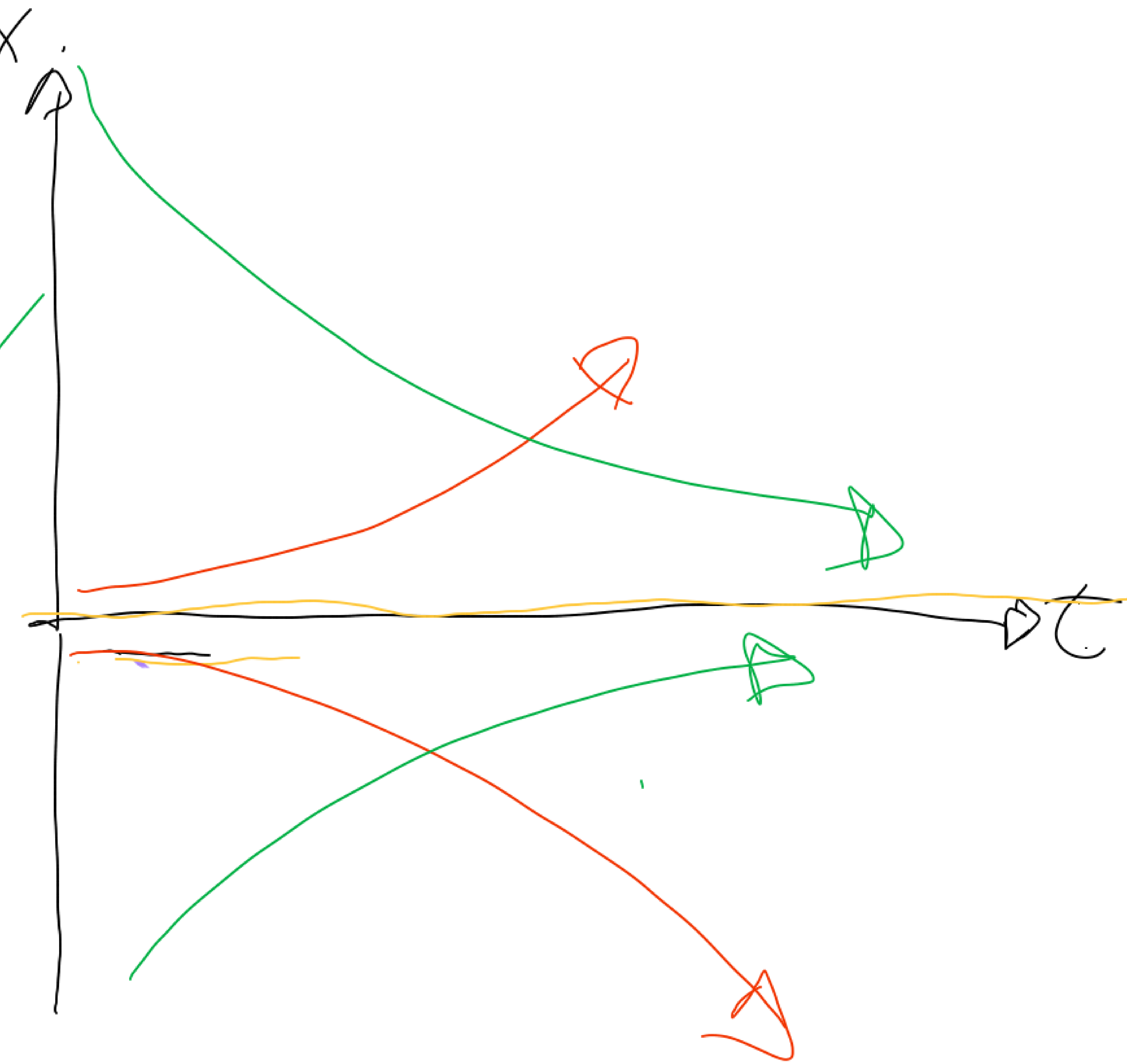
1.31 STUDIO QUALITATIVO DI CURVE INTEGRALI;

$$\dot{X} = \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} X = F(x)$$



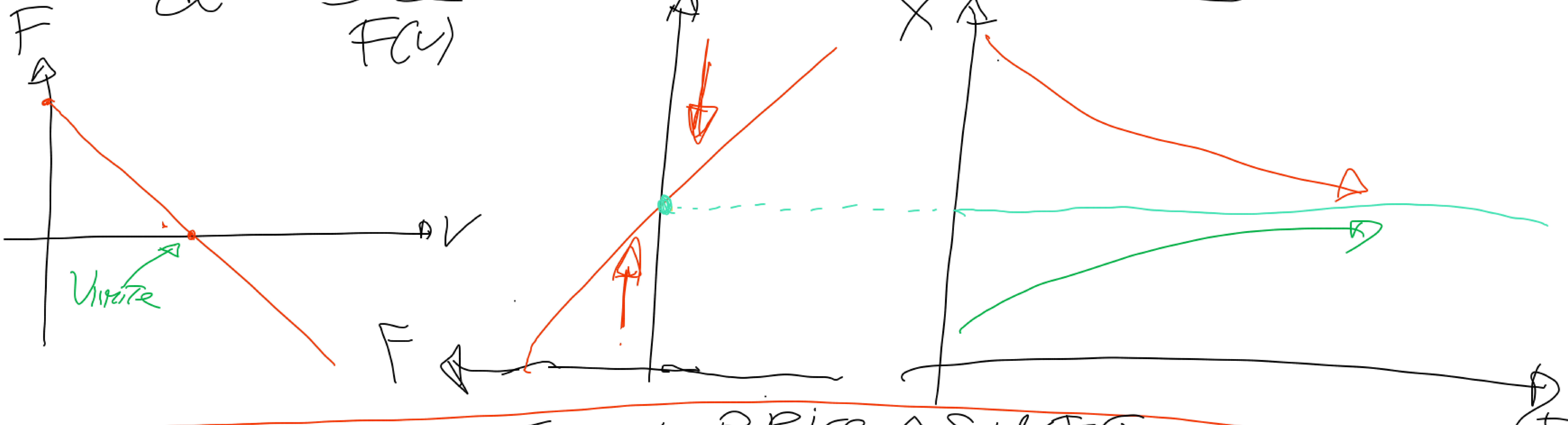
1 → 2





EX PARACADUTE STUDIO QUALITATIVO

$$m\frac{dv}{dt} = \underbrace{-\beta v + mg}_{F(v)} \longrightarrow \boxed{V_{\lim\limits_{t\to+\infty}} = mg/\beta}$$



LEMMA 1.25 EQUILIBRIO ASINTOTICO

Sia $x \in C^1(0,+\infty)$. Si suppone che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = L \in \mathbb{R} \wedge \lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = P_0 \xRightarrow{\text{TESI}} P_0 = \emptyset$$

deve essere

PROOF

Supponiamo per assurdo che invece sia $p_0 > 0$. Allora per la P.d.S. si ha $\dot{x}(t) > \varepsilon > 0$ con $t > t^*$ per opportuni: ε, t^*

$$x(t) = x(t^*) + \int_{t^*}^{t} \dot{x}(\tau)\,d\tau > \underbrace{x(t^*) + \varepsilon(t - t^*)}_{\lim_{t\to\infty} \cdot \, = +\infty}.$$

Contro l'ipotesi che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = L$$

$\square$