BUONGIORNO. SISTEMI DINAMICI LEZIONE 13

Programma lezione (cap. IV)

Prime definizioni iniziali: defs 4.1, 4.2, 4.3..

CONCETTO 1: INTEGRALE PRIMO

Def. 4.9 e Lemma 4.10
Ex. 4.7 (oscillatore armonico) con lemma 4.5 + grafici + spazio fasi e tempo di percorrenza
conservaz. E (thm. 4.6.1) caso conservativo e focus su dissipazione

CONCETTO 2: Equilibrio
def. PUNTO FISSO e caratterizzazione (stab/INST./asint. stab)
Thm 4.19 link con integrali primi (eg. E=k)
ex. 4.16/4.17/4.18
Classificazione

4.1 Richiami (generalizzano il cap. I)

(4.1) $\dot{\underline{x}} = \underline{\Phi}(\underline{x})$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

$\hookrightarrow \underline{\Phi} \neq \underline{\Phi}(\underline{x}, t) \to$ il sys. dyn. è autonomo

def (1.2) la sol. $\varphi(t)$ si dice "ORBITA"

la curva $\{(t, \varphi(t))\}$ si dice "GRAFICO"

Thm. 4.6.1

i moti (1) derivanti da forze solo posizionali sono conservativi

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

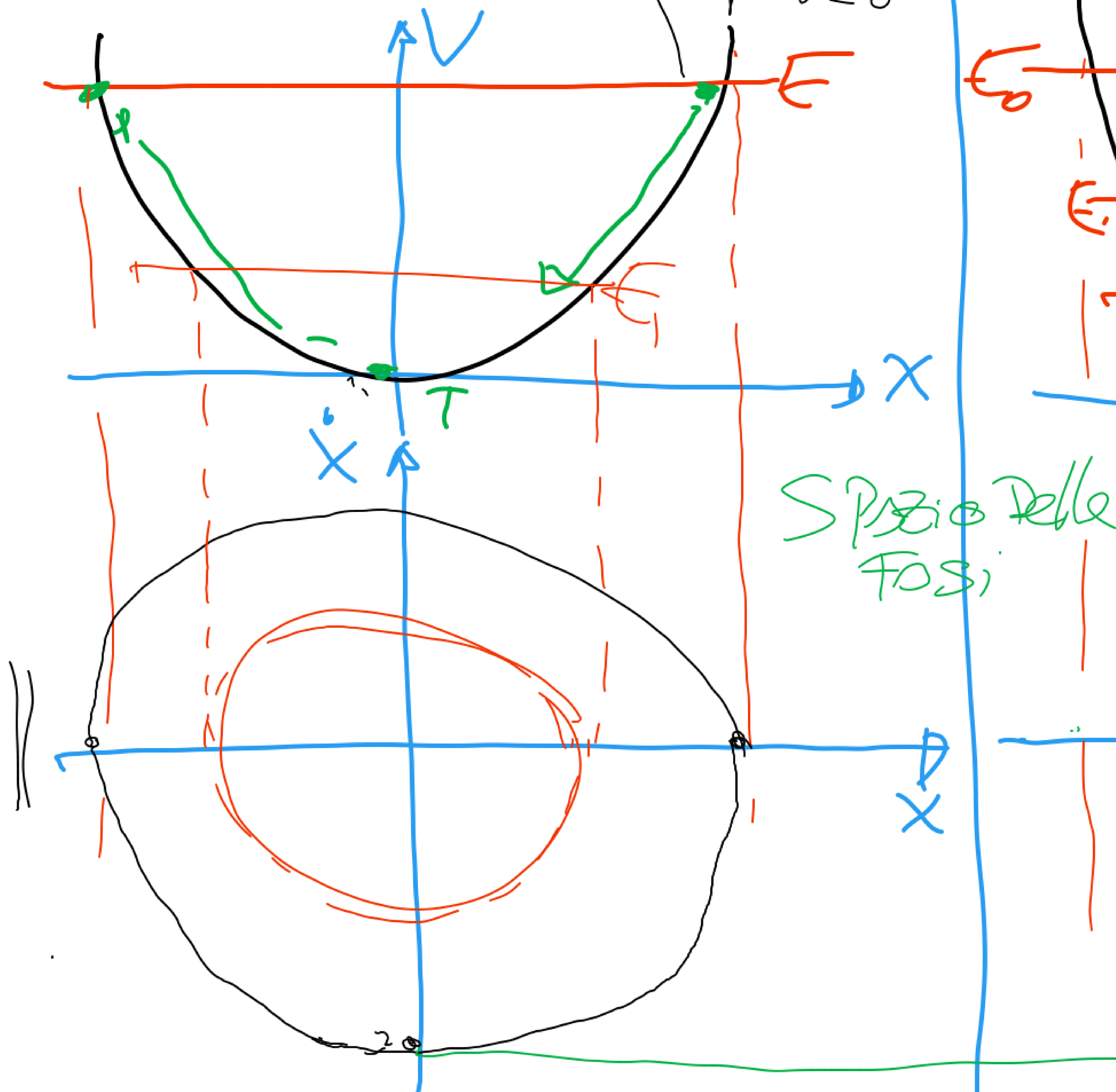
$$\dot{E} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} \left(m \ddot{x} + k x \right) = 0$$

cosa cambia se ∃ dissipativo

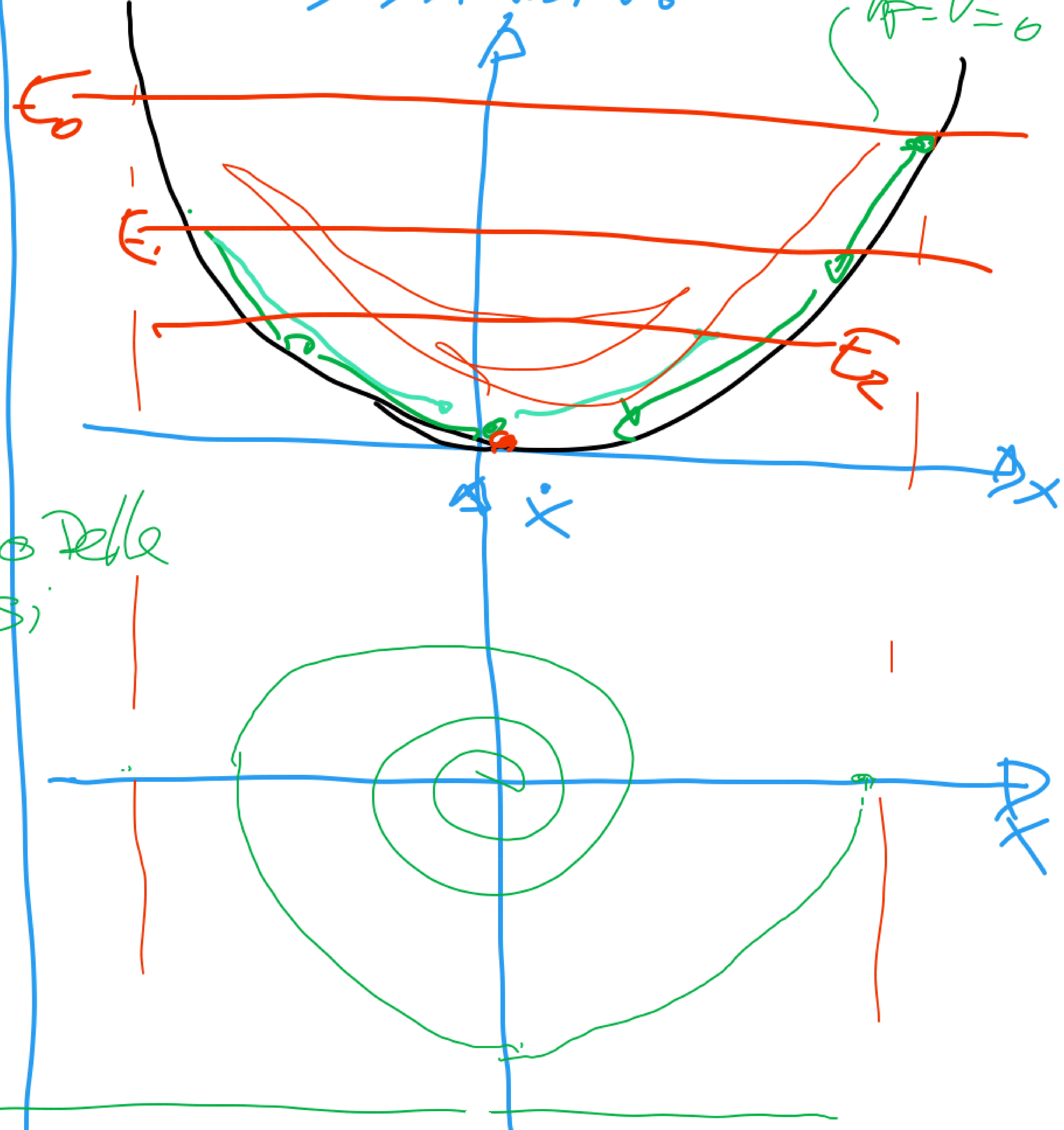
$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = -\beta \dot{x}$$

$$\dot{E} = -\beta \dot{x}^2 \leq 0$$

Conservativo



Dissipativo



$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \to \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - V(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]} \to \Delta t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}}$$

OSS. C.C. Sol. PERiodiche

Se la sol. massimale $\varphi(t)$ del PdC (C.I)

$\exists$: $\varphi(t + t_0) = \varphi(t_0) \to$ la sol. è periodica.

$$\begin{cases} F = -kx_1 = m_1 g \\ F = -kx_2 = m_2 g \end{cases}$$

Schema di riduzione

$$g M_{TOT} = (m_1 + m_2) g = -kx_1 - kx_2 = -kx_{TOT}$$

Se le F sono lineari

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kx^2 \longrightarrow E \text{ solo quadratici}$$

$$\Rightarrow P(E) \propto e^{-\frac{E}{T}} = e^{-\frac{kx^2}{2T}}$$

è 1 Gaussiana

Lemma 4.5 (è il 1.25)

Sia $\underline{x} \in C^1(0,+\infty)$, supponiamo che

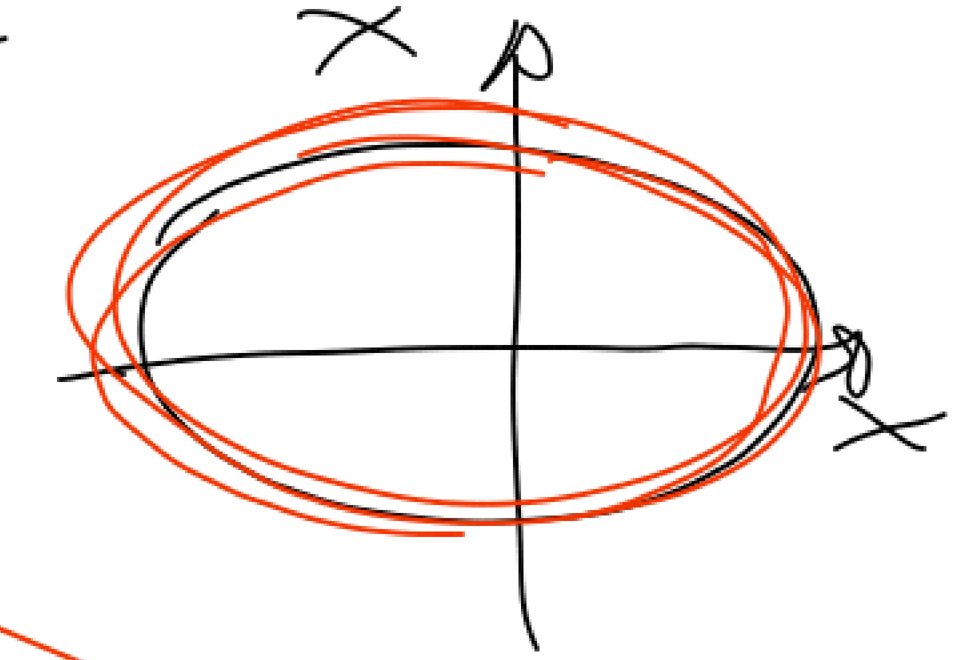
$\lim_{t\to+\infty} \underline{x}(t) = \underline{x}_L \in \mathbb{R}^n$; $\lim_{t\to+\infty} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{P}_L \in \mathbb{R}^n$

Tesi: $\Longrightarrow \underline{P}_L = \underline{\phi}$

Proof: Thm. Permanenza del segno.

ex. 4.7 Ancora sul Rotoarmonico

[spazio delle fasi: $F = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$]



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 & (4.7) \\ \dot{x}_2 = x_1 & (4.8) \end{cases}$$

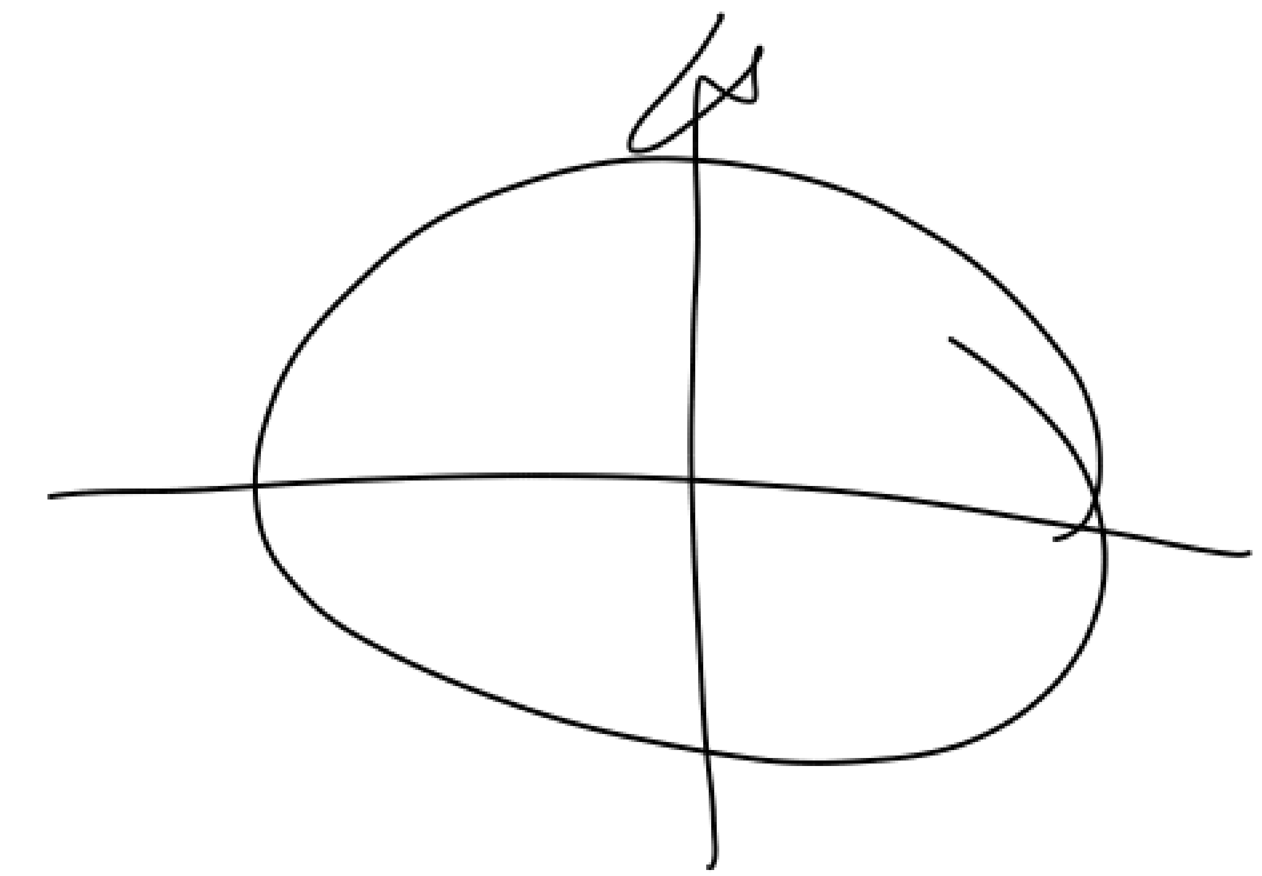
Moltiplico la (4.7) per x_1 e la (4.8) per x_2

$$x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = 0$$

$$\boxed{x_1^2(t) + x_2^2(t) = R^2}$$

e la derivo rispetto al tempo

Se il moto è conservativo, come vedo che non si ferma nel percorrere $\dot{x}^2 + x^2 = R^2$ nello spazio delle fasi?



① $t \in J = \mathbb{R}$

② $\exists\, T > 0 : \varphi(T) = \varphi(0)$

↳ per il lemma 4.5, x assurdo

$$\lim_{t \to +\infty} \dot{\varphi}(t) = \lim_{t \to +\infty} (-\varphi_2, \varphi_1) = (-\varphi_{L_2}, \varphi_{L_1}) \neq 0$$

Def. 4.9 INTEGRALE PRIMO → SIMMETRIA → QUANTITÀ CONSERVATA

Preso 1 sys. dyn $\dot{\underline{x}} = \underline{\Phi}(\underline{x})$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

1 suo integrale primo è 1 funzione $E \in C^1(A)$:

$$\frac{d}{dt} E = \nabla E \cdot \underline{\Phi}(\phi(t)) = 0$$

Lemma 4.10 1 funzione $E \in C^1(A)$ è 1 integrale primo per il sys. dyn. se e solo se $\boxed{\nabla E \cdot \underline{\Phi}(\underline{x}) = 0}$

Perché gli spazi si chiamano simmetrie

Nel piano x, y

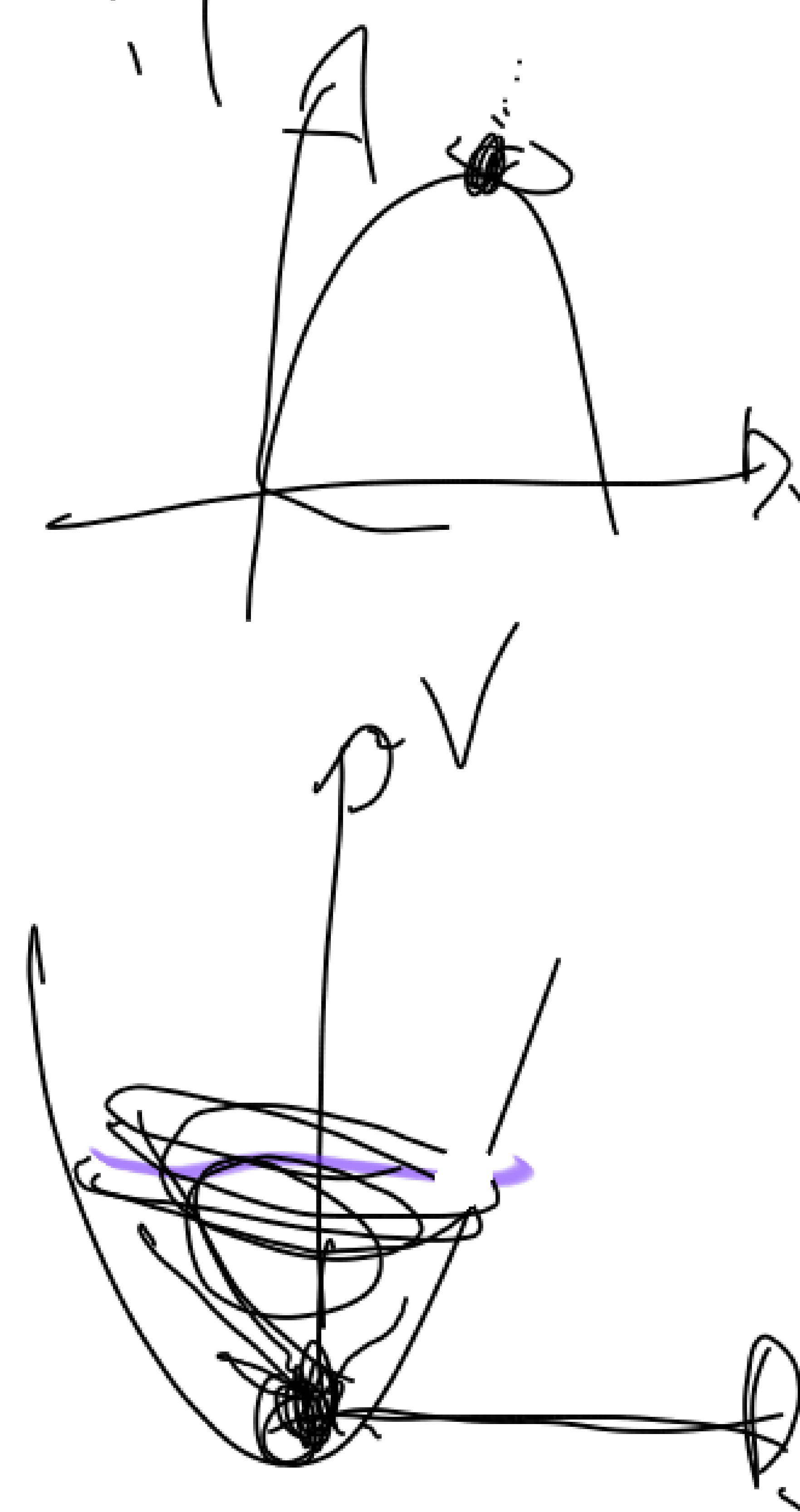
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right)$$

4.2 : Equilibrio

Def. 4.13 1 punto $\underline{x}_{eq} \in A$ si dice "Di equilibrio" / "Fisso" / "critico" per il sys. dyn. autonomo $\dot{\underline{x}} = \underline{\Phi}(\underline{x})$

se e solo se $\underline{\Phi}(\underline{x}_{eq}) = \underline{0}$



Oss. 4.4 △ voce

Lemma 4.15 Comportam. vicino ai Punti di Eq.

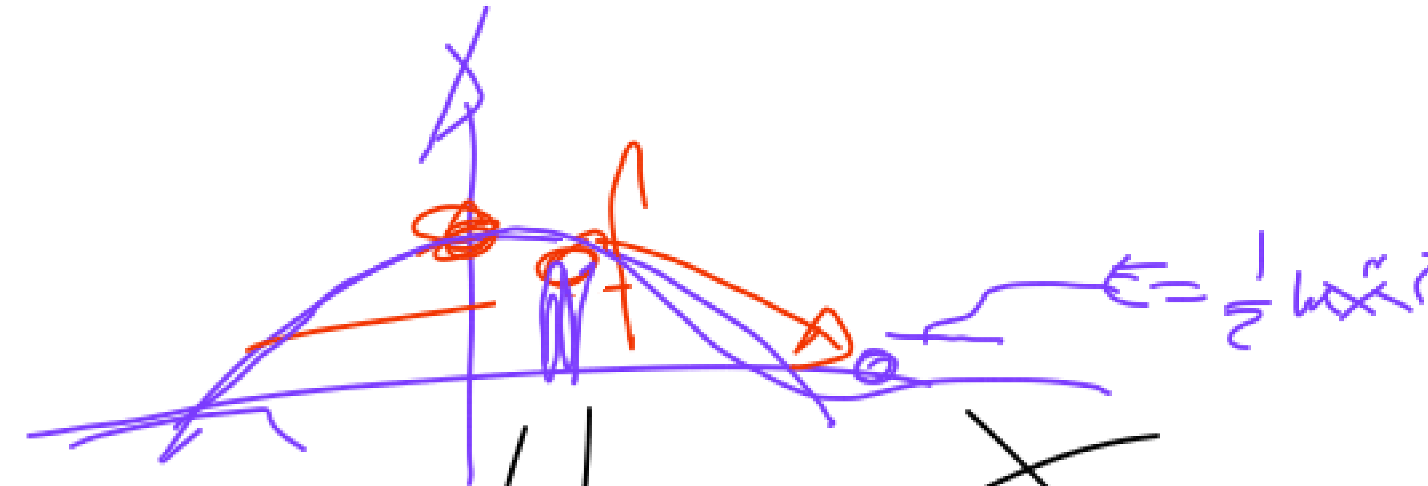
Sia $\underline{\phi} \in C^1(\alpha, \beta)$ 1 sol. del sys. Dyn. (4.11)

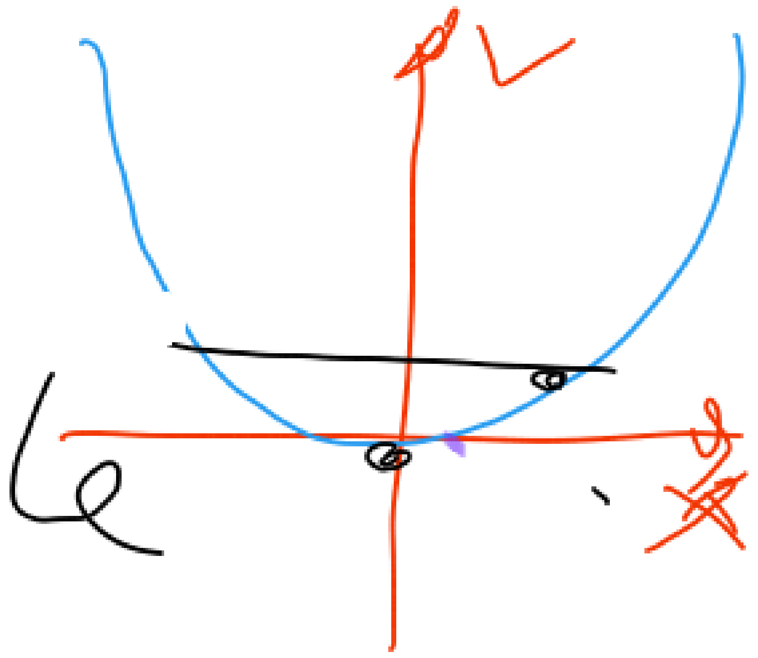
e supponiamo che $\lim_{t \to \beta^-} \phi(t) = \underline{x}_L \in A$

Supponiamo anche che questo $\phi(t)$ non sia costante

$\underrightarrow{\text{Tesi}}$ $\underline{\Phi}(\underline{x}_L) = 0$ se e solo se $\boxed{\beta = \infty}$

Def. 4.16





il punto di equilibrio $\underline{x}_{eq}$ si dice stabile

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: se $|\underline{x}_0 - \underline{x}_{eq}| < \delta$

$\Rightarrow \exists!$ sol. massimale φ del PdC $\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases}$

risulta definita (almeno) su $[0, +\infty)$ e

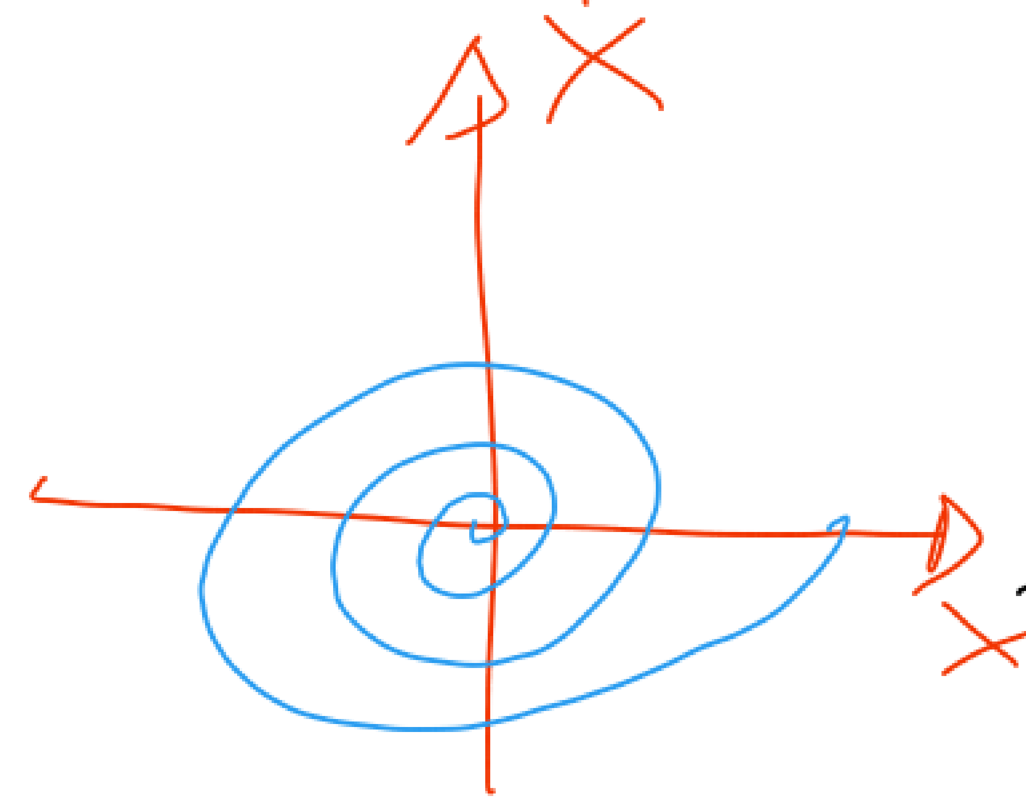
inoltre $|\varphi(t) - \underline{x}_{eq}| < \varepsilon$.

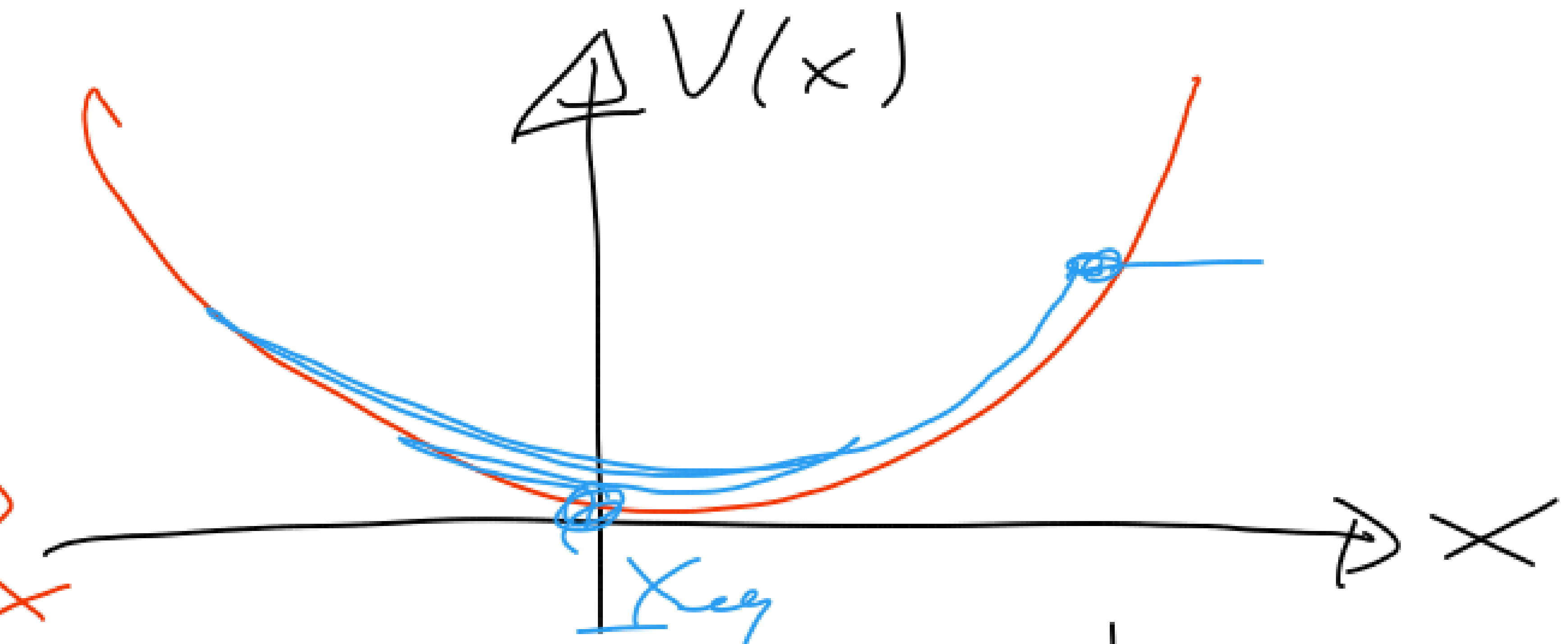
ALTRIMENTI il PUNTO FISSO si dice INSTABILE

Def. 4.17 $m\ddot{x}+kx=0 \longrightarrow m\ddot{x}+\beta\dot{x}+kx=0$

Th. cons. dell'en. meccanica $\longrightarrow$ I P. T D

1 PUNTO di EQ. si dice "asintoticamente stabile" se





1) è stabile

2) $\exists\, \delta>0$: se $|\underline{x}_0-\underline{x}_{eq}|<\delta$ allora la sol. massimale di $\dot{\underline{x}}=\Phi(\underline{x})$, $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$, soddisfa

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t)=\underline{x}_{eq}.$$

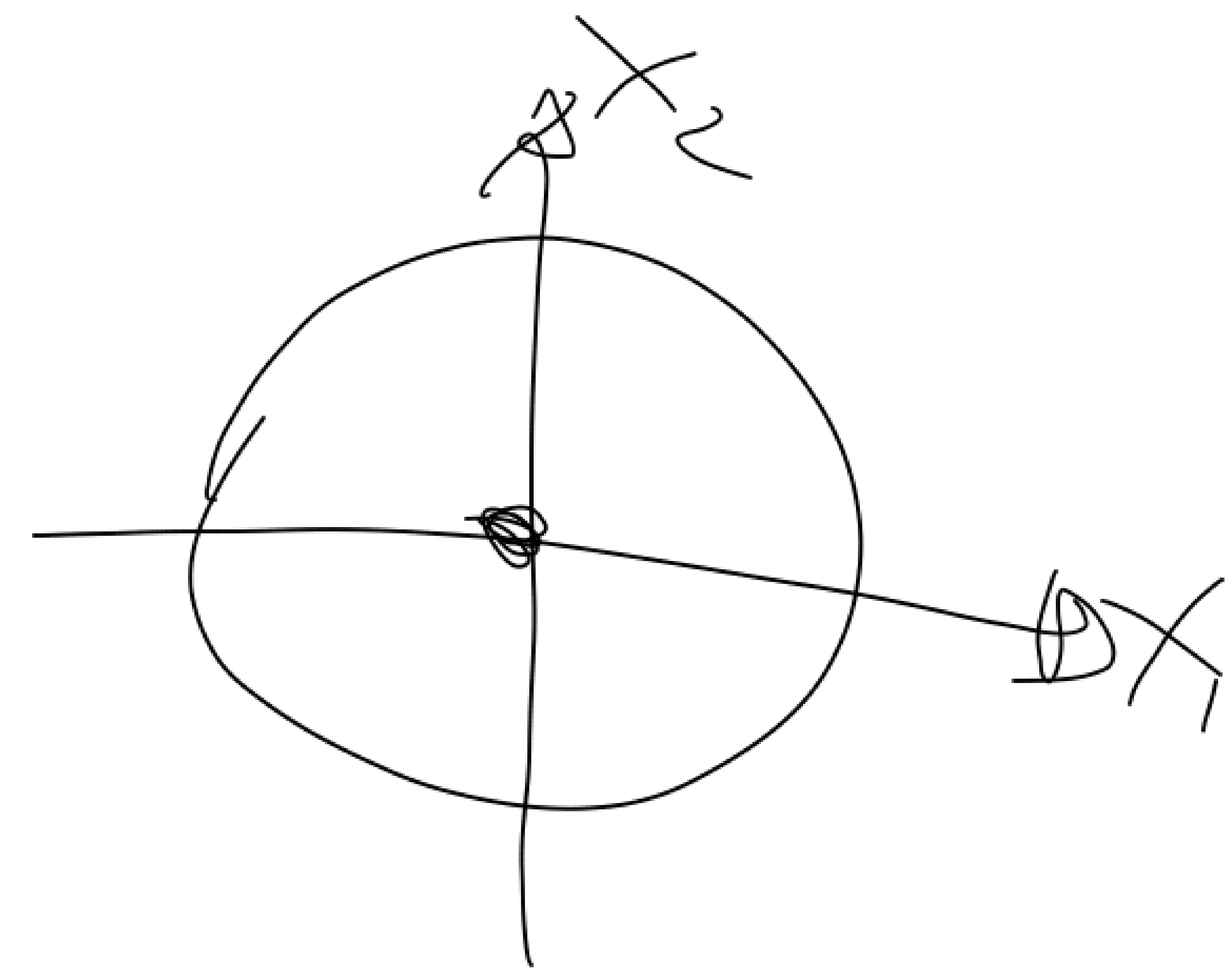
Thm. 4.19

Se il sys. dyn. $\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{\Phi}(\underline{x}) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$
P.d.C

ammette 1 integrale primo non identicamente costante

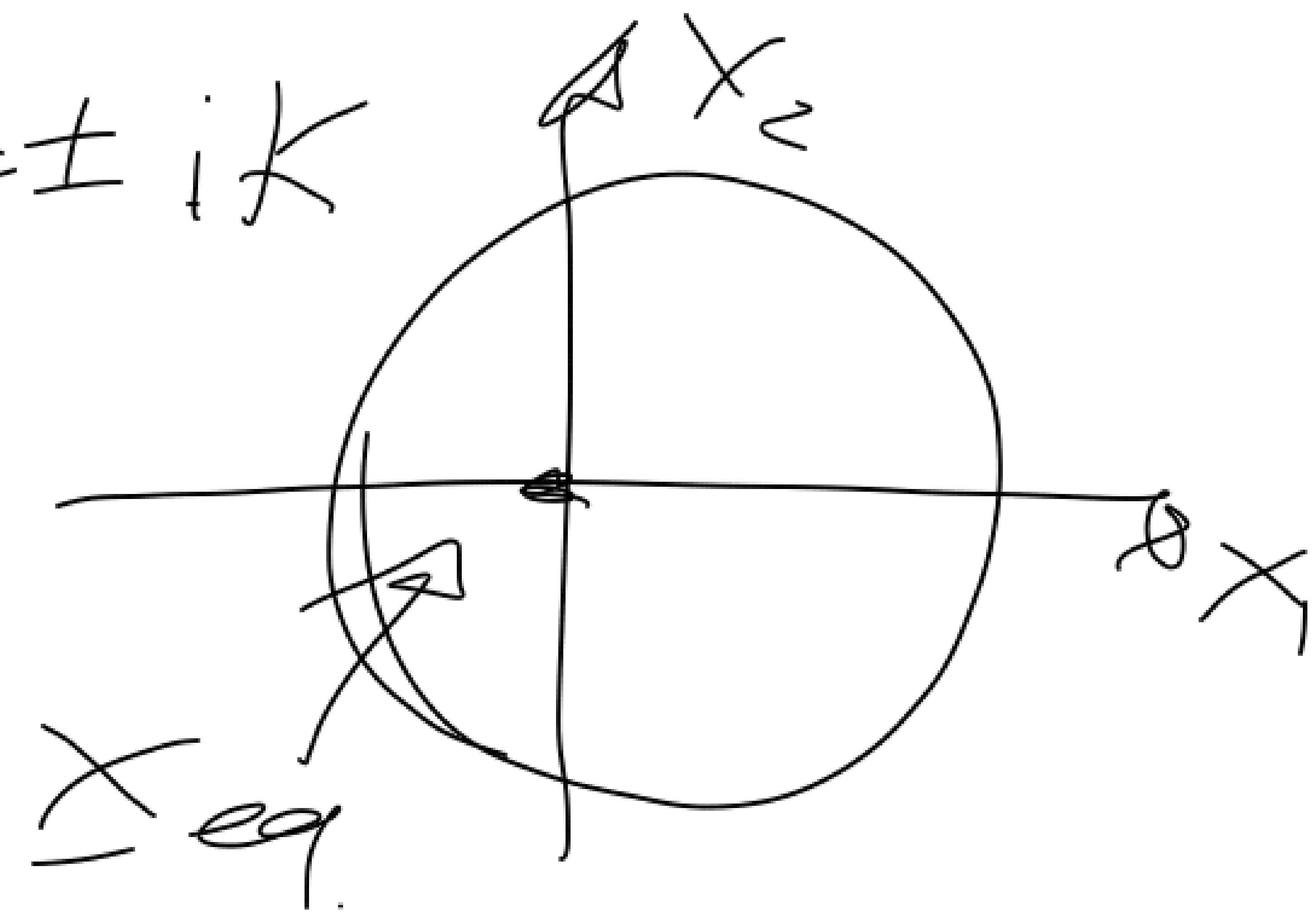
$\Rightarrow$ il sys. dyn. non ha punti fissi asintoticamente stabili

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = R^2$$



4.3 Equilibrio per sys. dyn. a coeff. costanti.

$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$, $\boxed{\underline{x}_{eq} = \phi}$ $\qquad \lambda_{1,2} = \pm iK$



(λ_1, λ_2) $\qquad \underline{x}(t) = ue^{\lambda t} + e^{\lambda t}[\underline{u}t + v]$

Thm. 4.23

A) Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale $< \phi \rightarrow \underline{x}_{eq}$ è sia stabile che asintot. stab.

B) Se $\exists$ almeno $1\ \lambda$: $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \rightarrow$ x_{eq} è instabile

C) Se $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ ma $\exists$ autovettori linearmente indipendenti in numero pari alla molteplicità algebrica di $\lambda \rightarrow$ il punto $\underline{x}_{eq}$ è stabile ex. 4.16 : Stabilità

Si consideri $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$

$\exists\, 2\lambda \in \mathbb{C}$

$\boxed{\lambda_1 = i} \rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \boxed{\lambda_2 = -i} \rightarrow \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}$

$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = \emptyset$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}e(\lambda_1) = \mathbb{R}e(\lambda_2) = \emptyset$

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix}$

EX. 4.18 asintot. stabile

$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\underline{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}$

$x(t) = C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

Ex. 4.17 Instabilità: Moto Galileiano

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\ddot{x} = 0}$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$