



## SCHEMA INSEGNAMENTO

### METODI MATEMATICI PER L'INTELLIGENZA ARTIFICIALE

Corso di studio di riferimento	LM39 – MATEMATICA
Dipartimento di riferimento	DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA "ENNIO DE GIORGI"
Settore Scientifico Disciplinare	MAT/07 FISICA MATEMATICA
Crediti Formativi Universitari	9
Ore di attività frontale	LEZ:63
Ore di studio individuale	
Anno di corso	1°
Semestre	2°
Lingua di erogazione	ITALIANO
Percorso	COMUNE/GENERALE/APPLICATIVO

Prerequisiti	<i>Laurea Triennale in Matematica o in Fisica. In particolare, nonostante non ci siano vincoli di sorta nei pre-requisiti, questo è un corso multidisciplinare tipicamente seguito da Fisici Matematici (Mat07), Probabilisti (Mat06), Analisti (Mat05), Fisici Teorici (Fis02), Fisici della Materia (Fis03) e Biofisici (Fis07).</i>
Contenuti	<i>Metodi di Fisica Matematica, Fisica Teorica, Probabilità &amp; Statistica per la comprensione e lo sviluppo della teoria delle reti neurali, con selezionati preamboli di processazione d'informazione in reti biologiche e mirate applicazioni all'Intelligenza Artificiale, il tutto da una prospettiva marcatamente di "meccanica statistica dei sistemi complessi".</i>
Obiettivi formativi	<p><i>Lo scopo ultimo del corso è condividere con lo studente i concetti salienti e, parimenti, fornire allo studente gli strumenti cardine, affinché questi possa continuare autonomamente la sua crescita culturale nell'ambito dell'Intelligenza Artificiale: tale trasferimento di informazione cercherà di essere supplito sia da un punto di vista formale (e.g. mostrare durante il corso metodi matematici rigorosi per impostare un problema di pertinenza e risolverlo opportunamente), sia logico/deduttivo, (e.g. capire cosa chiedersi -che sia ragionevole- per affrontare un dato problema, pertinente al tema del corso ovviamente) al fine di consentire allo studente tanto una propria autonomia di giudizio in materia quanto una capacità di apprendimento ed un'abilità comunicativa che lo rendano il più possibile indipendente dal docente.</i></p> <p><i>A tal fine il programma del corso è diviso in tre sezioni principali. La prima sezione serve per assicurarci di condividere una conoscenza scientifica di base (pre-requisito ovviamente necessario per muovere insieme i primi passi nel percorso delle reti neurali verso l'Intelligenza Artificiale): a tal proposito, nonostante nulla sia un requisito irrinunciabile, certamente una conoscenza della Teoria della Probabilità, della Meccanica Statistica, dei Sistemi Dinamici e dei Processi Stocastici certamente agevolerà lo studente nella comprensione profonda del corso: proprio per questo nella prima</i></p>



	<p>sezione del corso rivedremo insieme quindi alcuni argomenti fondamentali (per questo corso in particolare) di queste discipline.</p> <p>La seconda sezione introduce invece importanti modelli di Meccanica Statistica (i "sistemi complessi"), fondamentali per una successiva impostazione d'analisi -e relativa indagine- inerentemente il funzionamento delle reti neurali, e sviluppa gli opportuni metodi matematici necessari alla loro descrizione ed alla comprensione della loro fenomenologia. L'ultima e preponderante sezione, divisa per comodità in due sotto-sezioni, è invece completamente dedicata alle reti neurali: dopo una succinta descrizione (sempre in termini matematici) dei meccanismi cardine inerenti il neurone e la propagazione d'informazione tra neuroni (biologici), si costruiranno "reti di neuroni" (in altre parole si spiegheranno "cosa sono" -matematicamente parlando- queste reti neurali) e se ne studieranno le proprietà emergenti (cioè non immediatamente deducibili guardando al comportamento del singolo neurone), persistendo in una prospettiva di meccanica statistica.</p> <p>Nello specifico, proveremo a vedere come queste reti siano in grado di apprendere ed astrarre guardando esempi suppliti dal mondo esterno e come, successivamente, queste usino quanto appreso per rispondere opportunamente, qualora stimolate, al mondo esterno. Capiremo inoltre come queste a volte possano sbagliare, e perchè. Idealmente alla fine del corso lo studente dovrebbe essere in grado di poter proseguire autonomamente nell'approfondimento di tale disciplina, e di fruirne di conseguenza.</p>
Metodi didattici	Lezioni frontali in aula.
Modalità d'esame	Esame orale individuale che consta nella verifica dell'acquisizione da parte del candidato di un'abilità di comprendere ed esporre in modo chiaro e rigoroso i concetti cardine che intelaiano il corso.
Programma	<p><b>1. Richiami di Meccanica, Probabilità e Meccanica Statistica</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>-Problema del Time-Reversal con esempi di PDE di interesse in Fisica (e.g. D'Alambert &amp; Fourier).</li><li>-Sintesi della formulazione Lagrangiana ed Hamiltoniana della meccanica classica.</li><li>-Legge dei Grandi Numeri e Teoremi del Limite Centrale.</li><li>-Il modello di Ehrenfest: analisi sia della statica che della dinamica, studio dell'entropia.</li><li>-L'approccio di Gibbs ed il metodo della "distribuzione piu' probabile".</li><li>-L'approccio di Jaynes: una prospettiva del tutto inferenziale.</li><li>-Equivalenza (e non) tra le entropie di Gibbs e Shannon.</li><li>-La temperatura come rumore veloce: Dal random walk all'equazione del calore.</li></ul> <p><b>2. Fenomeni critici e transizioni di fase nei sistemi complessi</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>-Modello di Ising: Approssimazione di campo medio, transizioni di fase e rotture di simmetrie.</li><li>-Proprietà degli stati puri: Fattorizzazione delle funzioni di correlazione e clustering.</li><li>-Metodo del "punto di sella", equazioni Dobrushin-Ruelle-Lanford e disuguaglianze convesse.</li><li>-Metodo del campo di cavità, tecnica di Hamilton-Jacobi ed analisi di Fourier.</li><li>-La master equation: Hamiltoniana come funzione di Lyapunov ed il Bilancio Dettagliato.</li><li>-L'inverse-problem nel caso più semplice (un sola specie di Curie-Weiss &amp; via log-likelihood).</li><li>-Introduzione ai sistemi complessi: Misure quenched ed annealed,</li></ul>



	<p>overlap e repliche. -Ageing, rottura del time-translational-invariance e fenomenologia dei trap models. -Spettro di una catena di Markov semplice e frustrata: Rilassamento dei modi normali. -Il modello di Sherrington-Kirkpatrick: Analisi con "replica trick", Soluzione RS e crisi entropica. -Analisi mediante "replica trick": Approssimazione 1RSB e Teoria di Paris.</p> <p><b>3A. Teoria delle reti neurali: approccio biologico.</b> -le reti neurali -Il quadro storico nel quale è nata l'AI: tanti contributi da diverse discipline. -La "cable theory" di Hodking-Huxley ed il neurone "integrate &amp; fire" di Stein. -Il riflesso condizionato di Pavlov mediante dinamica stocastica à la Glauber. -La memoria associativa e le reti neuronali: La proposta di Hebb. -Il modello di Mattis, trasformazioni di gauge locali e storage di un bit di informazione. -Il modello di Hopfield a basso carico con il metodo della log-constrained entropy. -Il modello di Hopfield ad alto carico con il replica trick: Teoria di Amit-Gutfreund-Sompolinsky* -Conversione di tutti i metodi studiati nei previ punti 1 e 2 per gli spin glasses (e.g. Hamilton-Jacobi, Fourier, etc.) alle volta delle reti neurali</p> <p><b>3B. Teoria delle reti neurali: approccio artificiale.</b> -Il Perceptrone di Rosenblatt e la critica di Minsky&amp;Papert. -Apprendimento delle Boltzmann machines: scenario studente-allievo. -Apprendimento delle Boltzmann machines: scenario non supervisionato. -Equivalenza tra retrieval in reti di Hopfield e learning in macchine di Boltzmann. -Machine learning per reti neurali multitasking. -Machine learning per reti neurali che generalizzano. -Reti neurali dense e profonde: meccanica statistica del Deep Learning</p>
Testi di riferimento	<p>[Amit] D.J. Amit, Modeling Brain Functions, Cambridge Press (1985). [Barra] A. Barra, Appunti specifici per questo corso (2017). [Coolen] A.C.C. Coolen, R. Kuhn, P. Sollich, Theory of Neural Information Processing Systems, Oxford Press (2005).</p>
Altre informazioni utili	<p>Per qualunque cruccio il docente rimane a disposizione e risponde tipicamente entro 24 ore. (contattarlo via e-mail: <a href="mailto:adriano.barra@unisalento.it">adriano.barra@unisalento.it</a>).</p>



## PROGRAMMA IN DETTAGLIO

### Parte Uno: Statistical Mechanics (advanced)

#### **Lezione Uno: 2 ore**

Introduzione al corso e dichiarazione di finalità: cosa saprò fare alla fine?

Richiami di meccanica analitica: Lagrangiana, Hamiltoniana, Teoria di Hamilton-Jacobi per il pendolo semplice. Parentesi di Poisson. Concetto "oscillatore armonico".

#### **Lezione Due: 3 ore**

Richiami di meccanica analitica: analisi qualitativa dei moti. Teoremi di stabilità di Lyapounoff. Primo Teorema di Liouville. Secondo Teorema di Liouville. Sintesi della teoria cinetica di Maxwell e Boltzmann.

#### **Lezione Tre: 2 ore**

Il Teorema H. impostazione del Teorema Ergodico di Birkoff. Entropia di Kolmogorov-Sinai. Esempi di chaos deterministico: piccoli denominatori e mappa logistica.

#### **Lezione Quattro: 3 ore**

Discorso su ODE e time-reversal. La temperatura ubriaca e l'equazione di Fourier con annessa risoluzione mediante funzione di Green nello spazio degli impulsi.

Metodo di Gibbs per la distribuzione più probabile. Statica e dinamica del modello di Erhenfest.

#### **Lezione Cinque: 2 ore**

Richiami di termodinamica: i tre Principi. Teoria delle fluttuazioni termodinamiche: stabilità termodinamica dei sistemi. Variabili estensive ed intensive.

#### **Lezione Sei: 3 ore**

Il gas perfetto nel microcanonico. Dal microcanonico al canonico. Il gas reale: transizioni di fase nei reali. (Lezione Sacrificabile se ho collezionato ritardo).

#### **Lezione Sette: 2 ore**

Il modello di Curie-Weiss: primi approcci e dipinto fisico alla maniera dei marinai delle transizioni di fase nei discreti. Concetto di campo medio: fattorizzazione e funzioni costo di Kintchine.

#### **Lezione Otto: 3 ore**

Il modello di Curie-Weiss: aspetti matematici. Limite termodinamico con i carabinieri, interpolazione one-body, interpolazione Hamilton-Jacobi, interpolazione di Fourier e PDE del trasporto ottimo.



**Lezione Nove: 2 ore**

Il modello di Curie-Weiss: tecnica del campo di cavità e metodo del punto sella di Laplace.

**Lezione Dieci: 3 ore**

Il modello di Sherrington-Kirkpatrick: overlaps e repliche. Medie quenched. Aspettazione dell'energia. Soluzione mediante replica trick. Scenario replica simmetrico.

**Lezione Undici: 2 ore**

Teorema di Guerra-Toninelli.  
Soluzione RS mediante regola di somma.

**Lezione Dodici: 3 ore**

Soluzione RS mediante Hamilton-Jacobi, soluzione RS mediante PDE di Fourier.  
Una panoramica sulla rottura spontanea di simmetria di replica: soluzione di Parisi.  
Approccio RSB à la Guerra, approccio RSB à la Coolen, FDT-violation e temperature effettive.

**Lezione Tredici: 2 ore**

Metodo delle fluttuazioni gaussiane per la criticalità di SK: rompere l'ergodicità dall'alto.

**Lezione Quattordici: 3 ore**

Rilassamento all'equilibrio di una catena di Markov semplice: il bilancio dettagliato.  
L'Hamiltoniana come funzione costo di Lyapounoff. Convergenza del processo stocastico a Gibbs. Minimizzazione dinamica dell'energia libera.

Parte Due: Neural Networks & Machine Learning

**Lezione Quindici: 2 ore**

Introduzione al neurone biologico: dinamica dello spike, pompe sodio-potassio, neuriti, etc.  
Modello integrate and fire di Stein. Cable theory à la Tuckwell.  
Il neurone logico di McCulloch&Pitts: il neurone rumoroso di Ising.  
Il perceptrone: teorema di convergenza di Rosenblatt e problema dello XOR nel winter time.

**Lezione Sedici: 3 ore**

La gauge di Mattis ed il modello di Hopfield a basso carico: definizioni, generalità.  
Risoluzione a basso carico con il metodo della log-constrained entropy.  
Analisi segnale rumore verso l'alto carico.  
Risoluzione ad alto carico con il replica trick: scenario RS di Amit-Gutfreund-Sompolinsky.



**Lezione Diciassette: 2 ore**

Risoluzione del modello di Hopfield ad alto carico mediante la tecnica della stabilità stocastica.

**Lezione Diciotto: 3 ore**

Reti di Hopfield multitasking: diluizione e calcolo parallelo.  
Reti di Hopfield che dormono: verso il bound della Gardner mediante Kanter&Sompolinsky.  
Dreaming neural nets: approccio di replica e di cavità e discussione della linea ergodica.  
Il cervello del commesso viaggiatore di Konigsberg, Cenni di elettronica: equivalenza delle curve di risposta dell'OP-AMP e del CW. Reti di Hopfield mediante OP-AMPs.

**Lezione Diciannove: 2 ore**

Il modulo del riflesso condizionato di Pavlov: le origini strutturali di Hebb. Rilassamento di una catena frustrata: collasso sui modi lenti.

**Lezione Venti: 3 ore**

Statistical inference: Bayes sull'autoencoder e minimi quadrati come problema di riduzionismo statistico.  
Maximum entropy principle à la Jaynes.  
Statistical learning theory: cross-entropy di Kullback-Leibler.  
Boltzmann machines e contrastive divergence: supervised learning.  
Simulated annealing di Kirkpatrick & Vecchi.

**Lezione Ventuno: 2 ore**

Equivalenza tra reti di Hopfield e RBM: dualità Bayesiana.  
Transizioni di fase in RBMs con priors generiche: weights e neuroni analogici vs digitali.

**Lezione Ventidue: 3 ore**

Unsupervised learning in Hopfield networks: rumore quenched vs rumore planted.  
Teorema di compressione di Shannon, capacità di canale e capacità di storage.  
Autoencoders di Hinton, reti feedforward & backpropagation.  
Reti dense e RBM generalizzate à la Seinowsky: tradeoff tra risoluzione e storage.

**Lezione Ventitrè: 2 ore**

Processazione d'informazione emergente in reti chimiche: da Michaelis-Menten a Hill ed Adair.  
Porte (bio)-logiche e biocibernetica.

**Lezione Ventiquattro: 3 ore**

Processazione d'informazione emergente in reti chimiche: il caso del sistema immunitario.  
La teoria one-body di di Burnet e la rete idiotipica di Jerne: il self densamente connesso.  
Il two-signal model per la risposta adattiva secondaria ed il ruolo del repertoire.

**Lezione Venticinque: 3 ore**

Ripasso generale e spiegone Hebbiano per fare imprinting nell'ipotalamo,